CONCAVIDAD Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

UPV. MOOC. Derivadas. Resolución de problemas de optimización. Video 26/28. UPV. Santiago Moll López.

OPTIMIZACIÓN

Estrategia para resolver problemas de máximos y mínimos

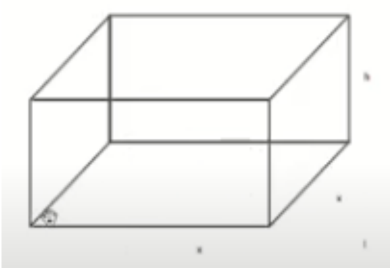
1.- Identificar todas las cantidades conocidas y las cantidades a determinar.
2.- Identificar y escribir la función primaria para la magnitud que debe hacerse máxima o mínima.
3.- Identificar y escribir, si existe, la ecuación secundaria que relaciona la variable principal con el resto.
4.- Escribir la función primaria en función de una sola variable usando, si es necesario, la ecuación secundaria.
5.- Identificar el dominio de la función primaria.
6.- Buscar los máximos y los mínimos con las técnicas vistas anteriormente.

Procedimiento para el cálculo de extremos relativos

1.- Se calcula la derivada de la función f (x), es decir f '(x).
2.- Resolvemos la ecuación f '(x) = 0. Los puntos solución y los puntos en los que no exista la derivada, se denominan puntos críticos de f (x).
3.- Calculamos f '' (x).
4.- Sustituimos los puntos críticos en la segunda derivada.
Entonces:
- Si f ''(a) > 0 entonces la función alcanza un mínimo relativo en el punto x = a y el valor del mínimo es en el punto (a, f (a)).
- Si f ''(a) < 0 entonces la función alcanza un máximo relativo en el punto x = a y el valor del máximo es en el punto (a, f (a)).
- Si f ''(a) = 0, se utiliza el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 1:

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta con base cuadrada y área de 108 cm^2 de superficie. ¿Qué dimensiones producen la caja de máximo volumen?



Solución:

Se puede construir una caja de base cuadrada pequeña pero alta, o una caja de base cuadrada grande y poco alta. ¿Donde cabe más?. Llamamos x a la distancia de los lados de la base y h a la altura de la caja. El volumen de la caja, que es lo que queremos maximizar es:

V = (area base) x altura = $x^2 \cdot h$ FUNCIÓN PRIMARIA

Esta función es la que llamamos función primaria. Sabemos que el área es de 108 cm^2 por lo que:

$$S = (\text{área de la base}) + 4\,(\text{área lateral}) = x^2 + 4xh = 108 \qquad \text{FUNCIÓN SECUNDARIA}$$

Tenemos así la ecuación secundaria que relaciona las variables x, h. Despejamos h y la escribimos en función de x:

$$h = \frac{108 - x^2}{4\,x}$$

Al dividir por x debemos llevar cuidado, por si x toma el valor 0. Pero esto no tiene sentido, no se puede construir una caja de lado 0 cm. Por tanto sustituimos el valor de h en la función primaria:

$$V = x^2 \cdot h = x^2 \left(\frac{108 - x^2}{4\,x}\right) = \frac{x\left(108 - x^2\right)}{4} = 27x - \frac{x^3}{4}$$

In[6]:=
```
V[x_] = 27 x - x^3/4
```

Out[•]= $27\,x - \frac{x^3}{4}$

Calculamos los valores críticos de la función volumen, para ello calculamos la primera derivada:

In[7]:=
```
V'[x]
```

Out[•]= $27 - \frac{3\,x^2}{4}$

Igualamos a cero y despejamos:

In[8]:=
```
Solve[V'[x] == 0, x]
resuelve
```

Out[•]= $\{\{x \to -6\}, \{x \to 6\}\}$

Los valores críticos son x = 6 y x = - 6. Como no tiene sentido una longitud negativa, descartamos la solución x = - 6. Cómo vamos a determinar si en ese punto hay un máximo o un mínimo. Con el criterio de la segunda derivada:

Si calculamos la segunda derivada:

In[9]:=
```
V''[x]
```

Out[•]= $-\frac{3\,x}{2}$

Sustituimos el valor crítico x = 6 y obtenemos:

In[10]:=
```
V''[6]
```

Out[•]= -9

Significa que en x = 6 la función alcanza un máximo. Es decir , el volumen máximo se alcanza con x = 6 y $h = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3$. Entonces el volumen máximo queda $V = 6^2 \cdot 3 = 108\ cm^3$.

In[∘]:=
```
TableForm[{{"(-∞,-1)", "(-1, 1)", "(1, +∞)"}, {-2, 0, 2},
  {f''[-2], f''[0], f''[2]}, {"Arriba", "Abajo", "Arriba"}}, TableHeadings →
  {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Concava hacia"}, {"I1", "I2", "I3"}}]
```
forma de tabla; cabeceras de tabla

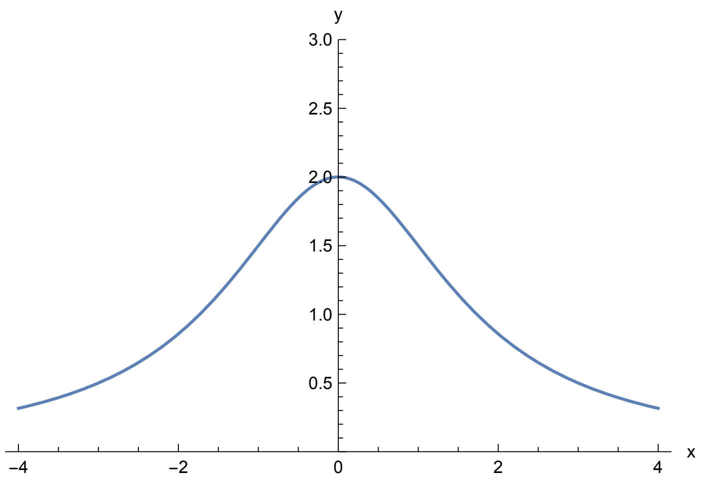
Out[∘]//TableForm=

	I1	I2	I3
Intervalo	(-∞,-1)	(-1, 1)	(1, +∞)
Valor prueba	-2	0	2
Imagen	$\frac{108}{343}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{108}{343}$
Concava hacia	Arriba	Abajo	Arriba

La representamos para ver como es:

In[43]:=
```
Plot[f[x], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 3}]
```
representación gráfica; etiqueta de ejes; rango de representación

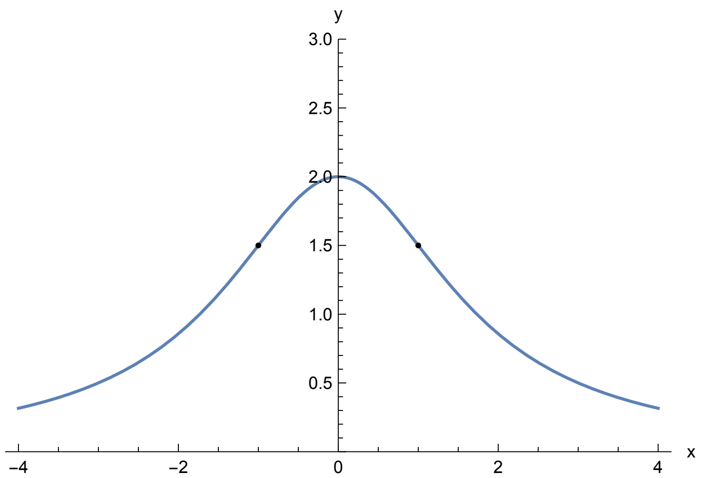
Out[∘]=



Si añadimos los puntos de inflexión:

In[44]:=
```
Show[Plot[f[x], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 3}],
 Graphics[{Thick, Point[{-1, f[-1]}],
   {Thick, Point[{1, f[1]}]}}]]
```
mues· representación gráfica; etiqueta de ejes; rango de representación; gráfico; grueso; punto; grueso; punto

Out[∘]=



DEFINICIÓN

Llamamos punto de inflexión de una función f (x) a aquellos puntos en los que la concavidad cambia de sentido (y existe recta tangente).

TEOREMA: Puntos de inflexión

Si (c, f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f(x), entonces:

- O bien f ''(c) = 0
- O bien f (x) no es derivable en x = c.

Ejemplo 2:

Halla los puntos de inflexión y discute la concavidad de la gráfica f (x) = x^4- $4x^3$

Solución:

Se trata de un polinomio, por tanto es una función continua y derivable. Calculemos la primera y segunda derivada.

In[ ]:= g[x_] = $x^4 - 4x^3$

Out[ ]= $-4x^3 + x^4$

In[ ]:= g'[x]

Out[ ]= $-12x^2 + 4x^3$

In[ ]:= g''[x]

Out[ ]= $-24x + 12x^2$

Igualando la segunda derivada a cero.

```
In[ ]:= Solve[g''[x] == 0, x]
        resuelve
```

Out[ ]= {{x → 0}, {x → 2}}

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos delimitados por los puntos x = 0 y x = 2.

```
In[ ]:= TableForm[{{"(-∞,0)", "(0, 2)", "(2, +∞)"}, {-1, 1, 3},
        forma de tabla
   {g''[-1], g''[1], g''[3]}, {"Arriba", "Abajo", "Arriba"}}, TableHeadings →
                                                               cabeceras de tabla
   {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Concava hacia"}, {"I1", "I2", "I3"}}]
```

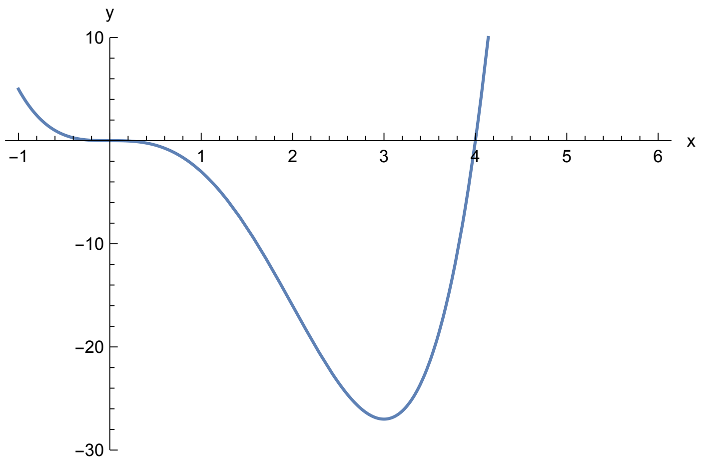
Out[ ]//TableForm=

	I1	I2	I3
Intervalo	(-∞,0)	(0, 2)	(2, +∞)
Valor prueba	-1	1	3
Imagen	36	-12	36
Concava hacia	Arriba	Abajo	Arriba

La representación de la función es:

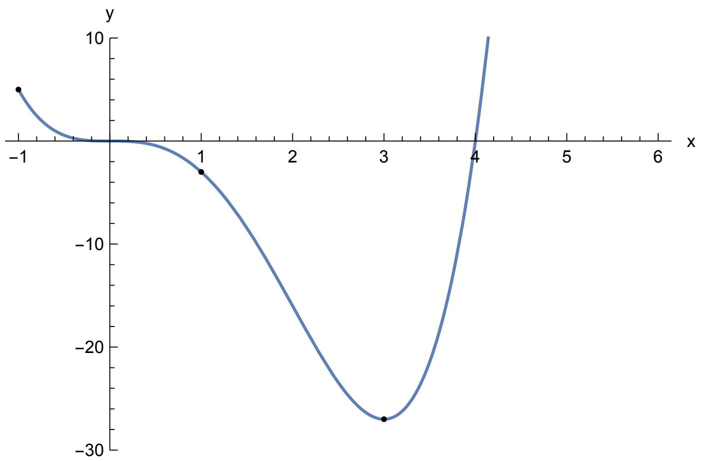
In[∘]:=
```
Plot[g[x], {x, -1, 6}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-30, 10}]
representación gráfica    etiqueta de ejes    rango de representación
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Show[Plot[g[x], {x, -1, 6}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-30, 10}],
mues· representación gráfica    etiqueta de ejes    rango de representación
  Graphics[{Thick, Point[{-1, g[-1]}],
  gráfico   grueso   punto
    {Thick, Point[{1, g[1]}], Thick, Point[{3, g[3]}]}}]]
    grueso  punto             grueso  punto
```

Out[∘]=



NOTA

EL recíproco del teorema no es cierto en general. Por ejemplo, en la función f (x) = x^4, la segunda derivada es cero en x = 0, pero el punto (0, 0) no es un punto de inflexión, pues la gráfica es cóncava hacia arriba antes de cero y despues del cero.

In[∘]:=
```
i[x_] = x^4
```

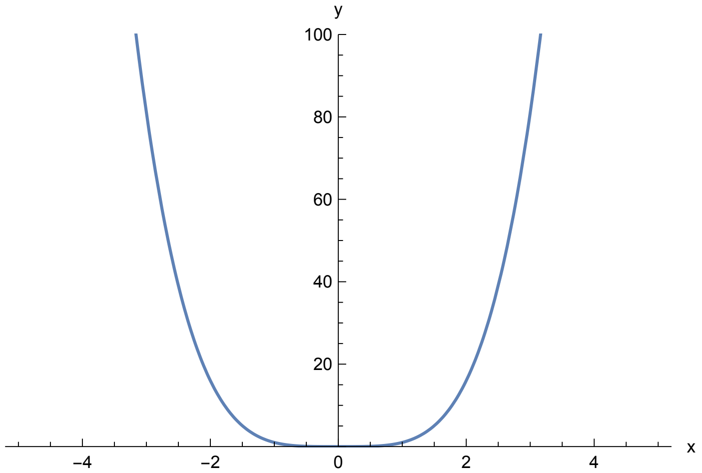
Out[∘]= x^4

In[∘]:=
```
i''[x]
```

Out[∘]= $12\ x^2$

In[ ]:=
```
Plot[i[x], {x, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 100}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[ ]=



TEOREMA: Criterio de la segunda derivada

Sea f (x) una función tal que f ‘ (c) = 0, (c es un punto crítico) y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces

1.- Si f ‘’(x) > 0, f (c) es un mínimo relativo.

2.- Si f ‘’(x) < 0, f (c) es un máximo relativo.

2.- Si f ‘’(x) = 0, el criterio no decide y hay que usar el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 3:

Halla los extremos de j (x) = $-3\,x^5 + 5x^3$

Solución:

Se trata de un polinomio definido en todos los puntos, función continua y derivable. Hallamos primero los valores críticos de j (x).

In[ ]:= $j[x\_] = -3\,x^5 + 5\,x^3$

Out[ ]= $5\,x^3 - 3\,x^5$

In[ ]:= `j'[x]`

Out[ ]= $15\,x^2 - 15\,x^4$

Igualando la primera derivada a cero.

In[ ]:=
```
Solve[j'[x] == 0, x]
```
resuelve

Out[ ]= {{x → −1}, {x → 0}, {x → 0}, {x → 1}}

Obtenemos tres puntos críticos. Vamos a clasificar esos puntos usando la segunda derivada.

In[ ]:= `j''[x]`

Out[ ]= $30\,x - 60\,x^3$

Evaluamos los puntos críticos en la segunda derivada.

In[•]:=
```
TableForm[{{"-1", "0", "1"},
  {j''[-1], j''[0], j''[1]}, {"Mínimo", "No decide", "Máximo"}},
 TableHeadings → {{"Punto x", "Valor j''(x)", "Conclusión"}, {"P1", "P2", "P3"}}]
```
forma de tabla · cabeceras de tabla

Out[•]//TableForm=

	P1	P2	P3
Punto x	-1	0	1
Valor j''(x)	30	0	-30
Conclusión	Mínimo	No decide	Máximo

Para x = 0 el test no decide, por lo que tendríamos que aplicar el test de la primera derivada.

In[•]:=
```
TableForm[{{"(-∞,-1)", "(-1, 0)", "(0, 1)", "(1, +∞)"},
  {-2, -1/2, 1/2, 2}, {j'[-2], j'[-1/2], j'[1/2], j'[2]},
  {"Decreciente", "Creciente", "Creciente", "Decreciente"}},
 TableHeadings → {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Conclusión"},
   {"I1", "I2", "I3", "I4"}}]
```
forma de tabla · cabeceras de tabla

Out[•]//TableForm=

	I1	I2	I3	I4
Intervalo	(-∞,-1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
Valor prueba	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Imagen	-180	$\frac{45}{16}$	$\frac{45}{16}$	-180
Conclusión	Decreciente	Creciente	Creciente	Decreciente

La representación de la función es:

In[•]:=
```
Plot[j[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-10, 10}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[•]=