DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS

¿Cómo se expresa una división de forma algebraica?

La división numérica de un dividendo (***D***) entre un divisor (***d***), ofrece un cociente (***C***) y un resto (***R***). La división se puede expresar:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)} \quad es\ decir \quad División = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

1. Efectúa las siguientes divisiones, de manera ordinaria y escribe los resultados de forma algebraica:

$a)\ (x^3 + 4x^2 + 6x) : x \qquad C(x) = x^2 + 4x + 6; \quad R(x) = 0$

$b)\ (x^3 + 3x^2 + 2x - 1) : x \qquad C(x) = x^2 + 3x + 2; \quad R(x) = -1$

$c)\ (4x^3 - 8x^2 - 6x) : 2x \qquad C(x) = 4x^2 - 8x - 6; \quad R(x) = 0$

2. Efectúa las siguientes divisiones, de manera ordinaria y escribe los resultados de forma algebraica:

$a)\ (x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4) : (x^2 + x + 2) \qquad C(x) = x^2 - 7x + 7; \quad R(x) = 10x - 18$

$b)\ (x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2) \qquad C(x) = x^2 - 4x + 5; \quad R(x) = x - 4$

$c)\ (6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7) \qquad C(x) = 3x^2 + 4x - 2; \quad R(x) = -31x$

$d)\ (6x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2) : (2x^2 + 3x - 1) \qquad C(x) = 3x^2 - 2x + 1; \quad R(x) = -2x + 3$

$e)\ (x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4) \qquad C(x) = x^2 + 8x + 32; \quad R(x) = 134$

$f)\ (2x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 1) \qquad C(x) = 2x^2 + x - 1; \quad R(x) = -3$

DIVISIÓN POR (x-a). REGLA DE RUFFINI

La regla de ***Ruffini*** sirve para dividir polinomios entre el binomio (***x-a***). Es decir por binomios del tipo:

$$x - 2, \quad x + 4, \quad x - \frac{3}{2}, \quad x + 1$$

en los que ***a*** vale, 2, -4, 3/2 y -1, respectivamente.

3. Efectúa las siguientes divisiones por Ruffini:

$a)\ (3x^5 + 2x + 1) : (x + 1) \qquad C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 5; \quad R(x) = -4$

$b)\ (x^6 + x^2 - 3) : (x + 3) \qquad C(x) = x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 82x - 246; \quad R(x) = 735$

$c)\ (x^9 + x^5 + 1) : (x - 2) \qquad C(x) = x^8 + 2x^7 + 4x^6 + 8x^5 + 17x^4 + 34x^3 + 68x^2 + 136x + 272; \quad R(x) = 545$

$d)\ (5x^4 - 2x + 1) : (x - 2) \qquad C(x) = 5x^3 + 10x^2 + 20x + 38; \quad R(x) = 77$

$e)\ (3x^6 + 2) : (x + 1) \qquad C(x) = 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3; \quad R(x) = 5$

APLICACIONES DE LA DIVISIÓN POR RUFFINI

1.- Cálculo de valor numérico de un polinomio

La regla de ***Ruffini*** sirve para obtener el valor numérico de un polinomio. Algebraicamente, el valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene, al sustituir la indeterminada por un número concreto y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio. Ahora lo vamos a calcular mediante el teorema del resto.

Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio, también se puede calcular utilizando *el teorema del resto*. El valor que toma un polinomio ***P(x)***, cuando hacemos ***x = a*** , es decir ***P(a)***, coincide con el resto de dividir ***P(x)*** entre ***(x-a)***. Esto quiere decir que, si en un polinomio sustituimos ***x*** por un número ***a***, y hacemos las operaciones , obtenemos otro número al que llamamos ***P(a)***. Este resultado, sería el mismo que si dividieramos el polinomio entre ***x-a***, así el resto es un número al que llamamos ***r***. El teorema nos asegura que ***P(a)*** es igual a ***r***.

Demostración

Si al dividir ***P(x)*** entre ***(x-a)*** el cociente es ***C(x)*** y el resto es el número ***r***, se tiene la relación:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$$

si hacemos ***x = a*** queda:

$$P(a) = (a - a) \cdot C(x) + r$$

Pero como a - a = 0 y 0 . C(x) = 0, queda ***P(a) = r***, que es lo que se quería demostrar. Por tanto para hallar el valor numérico de un polinomio basta aplicar la regla de *Ruffini* y tomar el resto. De esta manera obtenemos el resto de la división sin hacerla.

$$\boxed{P(a) = R}$$

4. Utilizando el valor numérico de un polinomio, halla el resto de:

$a)\ (x^3 - 2x^2 - 3):(x-1)$ $\quad C(x) = x^2 - x - 1; \quad R(x) = -4$

$b)\ (a^3 - 1):(a-1)$ $\quad C(a) = a^2 + a + 1; \quad R(a) = 0$

$c)\ (2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10):(x+2)$ $\quad C(x) = 2x^3 + 3x + 8; \quad R(x) = 60$

$d)\ (5x^4 - 3x^2 + 6x - 1):(x-1)$ $\quad C(x) = 5x^3 + 5x^2 + 2x + 8; \quad R(x) = 7$

5. Utilizando el valor numérico de un polinomio, comprueba si son exactas las siguientes divisiones:

$a)\ (x^4 - 16):(x+2)$ $\quad C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8; \quad R(x) = 0$

$b)\ (x^6 + 64):(x-2)$ $\quad C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32; \quad R(x) = 128$

$c)\ (x^{99} + 1):(x-1)$ $\quad C(x) = x^{98} + ... + x + 1; \quad R(x) = 2$

2.- Cálculo de las raices de un polinomio. Factorización.

Teorema del factor

Un número ***a*** es raiz de un polinomio ***P(x)***, si ***P(a) = 0***. El valor numérico de un polinomio para ***x = a*** puede calcularse obteniendo el resto de dividir entre ***(x - a)***. Si el resto es cero, entonces:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

$$\boxed{P(a) = 0}$$

es decir, el polinomio *dividendo* queda descompuesto en producto del divisor y el cociente. A su vez, es posible que ***C(x)*** tenga más raices, con lo que el polinomio puede descomponerse en más factores. Para localizar las raices de un polinomio ten en cuenta la siguiente propiedad: *Si un número entero, **a**, es raiz de un polinomio con coeficientes enteros, entonces **a** es divisor del término independiente.*

6. Utilizando el valor numérico de un polinomio, halla el valor de m en los polinomios siguientes sabiendo que:

$a)\quad 5x^4 + mx^3 + 2x - 3 \quad es\ divisible\ por\ \ x+1$

$b)\quad 3x^2 - mx + 10 \quad es\ divisible\ por\ \ x-5$

$c)\quad 3x^3 - 7x^2 - 9x - m \quad es\ divisible\ por\ \ x-3$

7. Utilizando el valor numérico de un polinomio, comprueba si son ciertas las afirmaciones:

$a)\quad x^3 - 1 \quad tiene\ como\ factor\ \ x-1$

$b)\quad x^3 + 1 \quad tiene\ como\ factor\ \ x+1$

$c)\quad x^4 - 17x^2 + 16 \quad tiene\ como\ factor\ \ x-4$

$d)\quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2 \quad tiene\ como\ factor\ \ x-2$

8. Utilizando el valor numérico, comprueba si los siguientes polinomios tienen por factores los que se indican. ¿Presentan algún otro factor?

$a)\quad x^3 - 1 \quad tiene\ como\ factor\ \ x+1$

$b)\quad x^3 - 1 \quad tiene\ como\ factor\ \ x-1$

$c)\quad x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 \quad tiene\ como\ factor\ \ x+2$

$d)\quad x^2 + x - 2 \quad tiene\ como\ factores\ \ x-1\ \ y\ \ x-2$

$e)\quad x^4 + 3x^3 - x - 3 \quad tiene\ como\ raíces\ \ x=-3\ \ y\ \ x=2$

9. Factoriza los siguientes polinomios (trinomios):

$a)\quad P(x) = x^2 - x - 2 \qquad P(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$b)\quad P(x) = x^2 - 11x + 30 \qquad P(x) = x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$

$c)\quad P(x) = 42 - x - x^2 \qquad P(x) = 42 - x - x^2 = (x+7)(x-6)$

$d)\quad Q(x) = 66 + 5x - x^2 \qquad Q(x) = 66 + 5x - x^2 = (x+6)(x-11)$

$e)\quad Q(x) = 3x^2 + 10x + 3 \qquad Q(x) = 3x^2 + 10x + 3 = (x - 1/3)(x-3)$

$f)\quad H(x) = 2x^2 - x - 1 \qquad H(x) = 2x^2 - x - 1 = (x + 1/2)(x-1)$

$g)\quad J(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad J(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

10. Factoriza los siguientes polinomios:

$a)\quad P(x)=x^3-x^2-4x+4$ $\qquad P(x)=x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2)$

$b)\quad P(x)=x^4-2x^3-x^2-2x$ $\qquad P(x)=x^4-2x^3-x^2-2x=x(x-1)(x+1)(x+2)$

$c)\quad P(x)=x^3+4x$ $\qquad P(x)=x^3+4x=x(x^2+4)$

$d)\quad P(x)=x^3+2x^2-x-2$ $\qquad P(x)=x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

$e)\quad P(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$ $\qquad P(x)=x^4+3x^3-x^2-3x=x(x-1)(x+1)(x+3)$

$f)\quad P(x)=4x^3-4x^2-16x+16$ $\qquad P(x)=4x^3-4x^2-16x+16=4(x-2)(x+2)(x-1)$

11. Factoriza los siguientes polinomios:

$a)\quad P(x)=x^3-x^2-4$ $\qquad P(x)=x^3-x^2-4=(x-2)(x^2+x+2)$

$b)\quad P(x)=x^3+2x^2+2x+1$ $\qquad P(x)=x^3+2x^2+2x+1=(x+1)(x^2+x+1)$

$c)\quad P(x)=x^3+3x^2-4x-12$ $\qquad P(x)=x^3+3x^2-4x-12=(x-2)(x+2)(x+3)$

$d)\quad P(x)=6x^3+7x^2-9x+2$ $\qquad P(x)=6x^3+7x^2-9x+2=6(x+2)(x-1/2)(x-1/3)$

$e)\quad P(x)=2x^4-5x^3+5x-2$ $\qquad P(x)=2x^4-5x^3+5x-2=(x-1)(x+1)(x-2)(2x-1)$

$f)\quad P(x)=x^4-6x^3-11x^2+96x-80$ $\qquad P(x)=x^4-6x^3-11x^2+96x-80=(x-1)(x-4)(x+4)(x-5)$

$g)\quad P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ $\qquad P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4=(x-1)(x-1)(x+2)(x+2)$