La velocidad de una partícula tiene la expresión $\vec{v}=(4t-1)\vec{i}$ $2\vec{j}$, donde t viene dado en segundos y v en m/s. Calcular la ecuación de la trayectoria, sabiendo que para t=1 s la partícula se encuentra en el punto P(3,4). Calcular también las componentes normal y tangencial de la aceleración, así como el radio de curvatura.

a) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C}$

$\vec{r}(t) = \int (4t-1)\vec{i}\,dt + \int 2\vec{j}\,dt + \vec{C} = (2t^2-t)\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{C}$

$\vec{r}(1) = 3\vec{i} + 4\vec{j} = (2(1)^2-1)\vec{i} + 2(1)\vec{j} + \vec{C} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{C}$

de donde $\vec{C} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

por tanto r(t) completo:

$\vec{r}(t) = (2t^2-t+2)\vec{i} + (2t+2)\vec{j}$

de aquí:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2t^2-t+2 \\ y(t) = 2t+2 \end{array}\right\} \quad t = \frac{y-2}{2}$$

$$x = 2\left(\frac{y-2}{2}\right)^2 - \frac{y-2}{2} + 2 = \cancel{2}\,\frac{(y-2)^2}{\cancel{4}\,2} - \frac{y-2}{2} + 2$$

$$2x = (y-2)^2 - y + 2 + 4 = y^2 - 4y + 4 - y + 2 + 4$$

$$\boxed{y^2 - 5y - 2x + 10 = 0}$$

b) $\vec{r} = (4(t-1)\vec{i} + 2\vec{j}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4(t-1))^2 + 2^2} = \sqrt{(4t-1)^2 + 4} = \sqrt{16t^2 - 8t + 5}$$

$$|\vec{a}_T| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{32t - 8}{2\sqrt{16t^2 - 8t + 5}} = \frac{16t - 4}{\sqrt{16t^2 - 8t + 5}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} \qquad |\vec{a}| = 4\,m/s^2$$

$$|\vec{a}_N|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{a}_T|^2 = 16 - \frac{256t^2 - 128t + 16}{16t^2 - 8t + 5} =$$

$$= \frac{256t^2 - 128t + 80 - 256t^2 + 128t - 16}{16t^2 - 8t + 5} = \frac{64}{16t^2 - 8t + 5}$$

$$|\vec{a}_N| = \frac{8}{\sqrt{16t^2-8t+5}}$$

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_N|} = \frac{(16t^2-8t+5)\sqrt{16t^2-8t+5}}{8} =$$

$$= \frac{(16t^2-8t+5)^{3/2}}{8}$$